# צביעת גרפים

עבור גרף G, נסן ב- את המספר הכרומטי של G. המספר הכרומטי מייצג את מספר הצבעים המינימלי שבהם אפשר לצבוע את הצמתים של G מבלי ששני צמתים שביניהם יש צלע יהיו בצבע זהה. המספר הכרומטי הוא בעצם המספר המינימלי של קבוצות בת"ל.

## השערת Hadwiger

**הגדרת מינור:** נאמר שגרף H הוא מינור של G, בסימון אם קיים כך שמתקיימים שלושה תנאים:

1. יש חלוקה ב-G' ל- קבוצות.
2. כל קבוצה היא קשירה לכל .
3. אם מכווצים כל קבוצה ב- לצומת אחת בלבד, ומורידים צלעות כפולות, אזי מקבלים את H.

**מספר Hadwiger**: של גרף G, בסימון , הוא המספר הגדול ביותר עבורו הוא מינור של G - *.*

**השערת Hadwiger:**  בכל גרף G מתקיים , או במילים אחרות אם  *אזי .*

## הוכחת השערת Hadwiger בגרפים אקראיים

**משפט Bollobas-Erdos-Catlin:** בגרף באופן אסימפטוטי כמעט וודאי (a.a.s) מתקיימת השערת Hadwiger.

**הוכחה**: נוכיח משפט זה בשני חלקים. קודם נוכיח שבאופן a.a.s מתקיים , ולאחר מכן נוכיח שבאופן a.a.s מתקיים .

### הוכחת חלק ראשון - a.a.s מתקיים

נחשוף את בשני שלבים, כאשר עבור . בשלב הראשון נראה שב- *יש מסלול באורך לפחות ובשלב השני נראה ש- על גבי מסלול זה מייצר מינור של קליקה בגודל הדרוש.*

*כדי למצוא מסלול ארוך ב- בכל איטרציה i, עד אשר , נוסיף צומת שאינה נמצאת כבר במסלול שהיא שכנה של הצומת האחרונה במסלול נוכחי. אם אין צומת כזו נכריז שהפרוצדורה נכשלה. נוכיח שפרוצדורה זו נכשלת בהסתברות קרובה ל-0.*

נסמן ב-P את המסלול הכי ארוך ב-*, ועוד נסמן . נחלק את P ל-k חלקים שווים. נניח שכל חלק . נוכיח כי עבור כל ההסתברות שאין צלע בין ל- היא אפסית.*

### הוכחת חלק שני - a.a.s מתקיים

**הגדרה צביעה rigid**: נאמר שצביעה ב-k צבעים  *נקראת* "rigid" *(קשיח), אם לכל אזי לכל צומת ב- מתקיים . כלומר, לכל צומת ב- יש צלע אל איזושהי צומת ב-.*

***משפט עזר 1****: כל גרף G עם יש צביעה ב-k צבעים שהיא* rigid*.*

***משפט עזר 2****: יהי צביעה ב-k צבעים שהיא* rigid*, אזי מבין יש לפחות קבוצות שגודלן קטן מ-.*

***הגדרה צביעה* partially rigid***: נאמר שלגרף G עם יש צביעה שהיא partially rigid אם מגדיר קבוצות וקבוצה X המקיימות:*

1. *לכל מתקיים .*
2. *. X נבנית על ידי לקיחת צומת אחת מכל קבוצה D.*
3. *לכל ולכל מתקיים .*

*להשלים הוכחה*

## השערת Hajos

**הגדרה subdivision**: יהי גרף H, הגרף המתקבל מהוספת צמתים בין הצלעות של H נקרא subdivision של H. נשים לב כי הדרגה של כל הצמתים שמתווספים היא 2 וכל צומת שמוסיפים מוסיפה עוד צלע לגרף. הצמתים המקוריים נקראים branch vertex.

**השערת Hajos**: אם אזי G מכיל subdivision של הגרף (קליקה בגודל k).

### הפרכת ההשערה בגרפים אקראיים

**משפט**: יהי גרף G, אזי a.a.s מתקיים וגם ב- אין subdivision של .

**הוכחה:** נחלק לשני חלקים. ראשית נוכיח a.a.s מתקיים . נשים לב כי תמיד מתקיים , כאשר זוהי הקבוצה הבת"ל הכי גדולה ב-G. לכן מספיק להוכיח *. נגדיר x מספר הקבוצות הבלתי תלויות ב- שהם בגודל . נוכיח שההסתברות ש- שואפת ל-0.*

נשתמש ב-Stirling approximation ונקבל:

*כעת באמצעות מרקוב נוכל לחשב .*

כעת נוכיח a.a.s מתקיים *שב-* ב- אין subdivision של .

***משפט עזר****: יהי גרף G ויהי . נסמן ב-*k *את ה-subdivision של הנמצא בתוף G. אזי אם אזי כל הצמתים שדרגתם גדולה שווה ל-3, branch vertex, הם , כלומר שיש ביניהם לכל הפחות צלעות.*

*נחזור להוכחה. לפי משפט עזר אם G מכיל subdivision של , אזי הוא מכיל קבוצת צמתים בגודל שהם . נסמן ב- מאורע זה ונוכיח שהסתברות מאורע זה שואפת ל-0. יהי קבוצת צמתים בגודל . נפעיל את חסם צ'רנוף ונקבל:*

*בשורה השנייה המעבר השני באמצעות אי-השוויון .*

## אלגוריתם צביעה חמדני

* סדר את הצמתים
* עבור כל צומת צבע אותה בצבע הכי נמוך שאינו נמצא בשכנים שלה.

אלגוריתם צביעה זה מחזיר צביעה לכל היותר .  *זהו מספר דרגות מקסימלי בגרף.* מכאן נסיק שתמיד מתקיים .

## צביעת צמתים חלקית

**משפט**: יהי ויהי G גרף המקיים . נגדיר צביעת צמתים חלקית של G באמצעות לכל היותר  *צבעים, בסימון , המקיימת:*

1. *ב- אין צלעות מונוכרומטיות, כלומר שצבועות באותו צבע בשני הצמתים שלהם.*
2. *לכל* קבוצת השכנים שלו צבועה ב-r צבעים כך שכל צבע הוא על לפחות 2 שכנים.

*אזי ניתן להרחיב את לצביעה תקנית על G כולו עם לכל היותר צבעים. הוכחה באמצעות הרצת האלגוריתם החמדני.*

## משפט Brook

**משפט**: יהי G גרף שאינו שלם ואין בו מעגל באורך אי-זוגי, אזי . אם G שלם או שיש בו מעגל אי-זוגי אזי *.*